Principios de Inducción y de Buena ordenación.

Inducción simple (o Inducción débil).

Sea P una propiedad definida sobre el conjunto N de los números naturales.

Escribiremos P(k) para indicar que el elemento $k \in N$ verifica P.

El principio de inducción afirma que:

- *Caso base: La propiedad se verifica para el primer elemento, P(1).*
- *Paso de inducción: Para cualquier $n \in N$ se verifica:*
  Si P(n) es cierta, entonces P(n+1) también lo es.
- *Conclusión: P(n) se verifica para todo $n \in N$*

La hipótesis del Paso de inducción se denomina, *hipótesis de inducción*.

En vez de considerar el primer elemento como caso base, podemos suponer un cierto elemento $n_0 \in N$ para el que se verifica la propiedad.

En este supuesto el enunciado quedaría así:

- *Caso base: Se verifica $P(n_0)$ para un cierto $n_0 \in N$.*
- *Paso de inducción: Para cualquier $n \geq n_0$ se verifica:*
  Si P(n) es cierta, entonces P(n+1) también lo es.
- *Conclusión: P(n) se verifica para todo $n \geq n_0$*

Inducción fuerte.

Cuando la hipótesis de inducción se aplica a todos los elemento anteriores a uno dado, obtenemos la Inducción fuerte:

- *Caso base: Se verifica $P(n_0)$ para un cierto $n_0 \in N$.*
- *Paso de inducción: Para cualquier $n \geq n_0$ se verifica:*
  Si P(k) es cierta para cualquier k, $n_0 \leq k < n$, entonces P(n) también lo es.
- *Conclusión*: P(n) se verifica para todo $n \geq n_0$

Los principios de inducción débil y fuerte son equivalentes

Principio de buena ordenación:

Cualquier subconjunto de números naturales, excepto el vacío, tiene un primer elemento (o dicho con otras palabras, un elemento mínimo).

Los principios de inducción y de buena ordenación son equivalentes.

Ejercicios de preparación para la ON de 2021

CONJETURA E INDUCCIÓN

1.- Haz una conjetura acerca de la fórmula que calcula la suma de los n primeros cubos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$$

y a continuación, pruébala por inducción

2.- Dada la sucesión

$$a_1 = \frac{1}{6}, \ \cdots, a_{n+1} = \frac{n+1}{n+3}\left(a_n + \frac{1}{2}\right) \text{ para cada } n \geq 1$$

conjetura el valor de a_{2021} y haz la prueba por inducción. (Arabia Saudita 2012)

INDUCCIÓN SIMPLE

3.- Determina todos los números naturales para los cuales, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n > 2^n$

4.- Demostrar que para todo número natural, $n \geq 2$, se verifica:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$

INDUCCIÓN FUERTE

5.- Probar que todo número natural, mayor que 1 o es primo o descompone en un producto de factores primos.

6.- Sean $x_1, x_2, \cdots, x_n$ números enteros tales que se pueden expresar como suma de dos cuadrados perfectos. Probar que su producto, $x_1 \cdot x_2 \cdots x_n$, puede expresarse igualmente como suma de dos cuadrados perfectos.
-------------------------------------- (Olimpiada matemática alemana, 2013)

7.- Probar que $\forall n \in N,\ n \geq 12,\ \exists\ a, b \text{ tales que } n = 4a + 5b$,

8.- Los vértices de un polígono convexo son coloreados por al menos tres colores tales que ninguna pareja de vértices consecutivos tienen el mismo color. Probar que el polígono se puede descomponer en triángulos, por diagonales que no se intersequen y cuyos puntos extremos tengan diferentes colores.

9.- Consideremos la función de Hofstadter, $D: N \to N$, definida así:

$$D(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ n - D(D(n-1)), & n > 0 \end{cases}$$

Probar que para todo $n \geq 2$ verifica que $0 < D(n) < n$

PRINCIPIO DE BUENA ORDENACIÓN.

10.- En un torneo cada jugador juega con cada uno de los otros jugadores exactamente una vez y en cada juego hay un ganador y un perdedor.

Decimos que los jugadores $p_{1,}\ p_2,\cdots,p_m$ forman un ciclo de longitud m si $p_{1,}$ le gana a $p_{2,}$, $p_{2,}$ le gana a $p_{3,}$, . . ., p_{m-1} le gana a p_m , y p_m le gana a $p_{1,}$.

Demostrar que si hay un ciclo $p_{1,}p_2,\cdots,p_m$ $(m \geq 3)$ en un torneo, entonces hay un ciclo de longitud 3.

11.- Encontrar, si existen, todas las cuaternas de números enteros positivos. *(x, y, z, t)*, que verifiquen $x^2 + y^2 = 7(z^2 + t^2)$.

12.- Si *a*, *b*, *c* son enteros tales que $a^6 + 2b^6 = 4c^6$, demuéstrese que $a = b = c = 0$.

OTROS EJERCICIOS DE INDUCCIÓN

13.- Sea a_n la **sucesión de Fibonacci**: 1, 1, 2, 3, 5, 8,…, a_n, donde, $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n>1$

a) Probar que para todo n, $a_n < 2^n$.

b) Probar que el término general se expresa: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

14.- Demostrar por inducción el **Pequeño Teorema de Fermat**:

Si *n* es un <u>número natural</u> y *p* primo, entonces, $n^p \equiv n \pmod{p}$

[De manera equivalente este teorema suele expresarse también así:

Si p es un número primo, entonces para cada número natural $a>0$

coprimo con p, se verifica que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Como aplicación, calcular el resto de dividir 8^{187} entre 13]

15.- Sin usar ninguna tabla encontrar el valor exacto de:

$P = \cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\ \cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\ \cos\frac{5\pi}{15}\ \cos\frac{6\pi}{15}\ \cos\frac{7\pi}{15}$

[<u>Indicación</u>: utilizar la siguiente fórmula que deberá demostrarse por inducción:

$\cos x \cos 2x \cos 4x \cdots\ \cos 2^{n-1}x = \frac{\sin 2^n x}{2^n\ \sin x}$] ----- (*Olimpiada húngara 1967; sin la indicación*)